Macroeconomía I (MAE)
Profesor: Mauricio Tejada
Segundo Semestre de 2018
Tarea 1

Instrucciones: Este tarea consta de **6 preguntas** y debe ser entregada el día **viernes 5 de octubre de 2018** vía email a `matejada@uahurtado.cl`. Para obtener crédito tiene que sustentar sus repuestas. Trabajen en grupos de hasta 3 personas. Esta prohibido *copiar y pegar*, dos tareas idénticas recibirán calificación cero.

Problemas

1. **Propiedades de la Función de Utilidad:** Considere la siguiente función de utilidad separable aditivamente:

$$U(c_0, c_1, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

donde T puede ser finito o infinito.

a) Sea $u(c_t) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ con $0 < \sigma < \infty$. Muestre que $u(c_t)$ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y satisface la condición de Inada $\lim_{c\to 0} u'(c_t) = \infty$.

b) Muestre que $\lim_{\sigma\to 1} \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = log(c_t)$ para cualquier c_t.

c) Una función de utilidad $U(c_0, c_1, ..., c_T)$ es del tipo CES si existe una transformación estrictamente creciente $g(U)$ (esto es, $g(x)$ es una función estrictamente creciente) tal que $g(U(c_0, c_1, ..., c_T))$ toma la forma:

$$\left(\alpha_0 c_0^{1-\rho} + \alpha_1 c_1^{1-\rho} + ... + \alpha_T c_T^{1-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_T$ son parámetros positivos. Muestre que $U(\cdot) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ pertenece a la familia de las CES.

d) Una función de utilidad $U(c_0, c_1, ..., c_T)$ es del tipo Cobb-Douglas si existe una transformación estrictamente creciente $g(U)$ (esto es, $g(x)$ es una función estrictamente creciente) tal que $g(U(c_0, c_1, ..., c_T))$ toma la forma:

$$(c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} ... c_T^{\alpha_T})$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_T$ son parámetros positivos. Muestre que $U(\cdot) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ pertenece a la familia de las Cobb-Douglas cuando $\sigma = 1$.

e) Una función de utilidad $U(c_0, c_1, ..., c_T)$ es homotética si existe una transformación estrictamente creciente $g(U)$ (esto es, $g(x)$ es una función estrictamente creciente) tal que $g(U(c_0, c_1, ..., c_T))$ homogénea de grado 1, esto es:

$$g(U(\alpha c_0, \alpha c_1, ..., \alpha c_T)) = \alpha g(U(c_0, c_1, ..., c_T)), \forall \alpha > 0$$

Muestre que $U(\cdot) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ es homotética.

[Ayuda: Use la siguiente transformación monótona: $g(U) = \left[(1-\sigma)\,U + \frac{1}{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$ si $\sigma \neq 1$ y $g(U) = \exp(U)$ si $\sigma = 1$.]

2. Considere una economía con un número muy grande de familias idénticas que viven infinitos periodos (dinastías) y cuyas preferencias están dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t$$

Cada miembro de las familias está dotada de k_0 unidades de capital en el periodo 0 y una unidad de trabajo en cada periodo. El número de miembros de cada familia en t es N_t, donde $N_t = \eta N_{t-1}$ y $\eta > 1$. Por simplicidad, asuma que $N_0 = 1$. Considere dos tecnologías alternativas para esta economía. La tecnología 1 es:

$$Y_t = Z_t K_t^{\theta} N_t^{1-\theta}$$

mientras que la tecnología 2 es:

$$Y_t = Z_t K_t^{\mu} N_t^{\phi} L_t^{1-\mu-\phi}$$

En estas tecnologías, Z_t es la productividad total de factores (con $Z_t = \gamma Z_{t-1}$, $\gamma > 1$ y $Z_0 = 1$), K_t es el stock de capital total, Y_t es la producción total, y L_t es el stock total de tierra. Este último factor se asume fijo, esto es no se acumula ni se deprecia. Para simplificar y sin pérdida de generalidad, asuma que $L_t = 1$ para todo t. La restricción de recursos de la economía, suponiendo una tasa de depreciación del 100 % en cada periodo, es:

$$N_t c_t + K_{t+1} = Y_t$$

con $K_0 = k_0$ dado.

a) Suponga que sólo la tecnología 1 está disponible. Formule el problema del planificador central. El planificador busca maximizar la utilidad de todos los individuos, esto es: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t \log c_t$.

b) Caracterice la senda de crecimiento balanceado. Caracterizar significa que debe derivar las ecuaciones que determinan el movimiento de todas las variables endógenas a lo largo de la senda. Resuelva explícitamente por la tasa de crecimiento del consumo per cápita c_t.

c) Repita los ejercicios (1) y (2) pero ahora usando la tecnología 2.

d) Compare cómo la tasa de crecimiento de la población, η, afecta a la tasa de crecimiento per cápita en los dos casos. Provea un explicación intuitiva de sus resultados.

3. En este ejercicios introducimos decisiones de consumos y ocio. Considere una economía con un número muy grande de familias idénticas que viven infinitos periodos (dinastías) y cuyas preferencias están dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$$

donde c_t es el consumo por persona y l_t es el consumo de horas de ocio por persona. La función $u(\cdot)$ es estrictamente creciente en ambos argumentos, estrictamente cóncava y dos veces diferenciable. La restricción presupuestaria de las familias está dada por:

$$c_t + k_{t+1} = w_t n_t + (1 + q_t)k_t$$

mientras que la restricción de tiempo es:

$$n_t + l_t = 1$$

con n_t la cantidad de horas dedicadas a trabajar y k_0 está dado. Note que en la restricción de la familia suponemos que el capital no se deprecia. Las empresas, por su parte, producen con una tecnología neoclásica $Y_t = F(K_t, L_t)$ donde K_t es el stock de capital rentado y L_t es la cantidad de trabajo contratado (medido en horas de trabajo). Definamos la siguiente notación: $\kappa = K/L$ es el capital por hora trabajada y k es el capital por persona.

a) Resuelva el problema de maximización de las firmas. Note que las firmas arriendan capital y trabajo a los precios q_t y w_t, respectivamente.

b) Formule el problema de optimización de las familias y derive las condiciones de primer orden que caracterizan las secuencias óptimas de consumo, ocio y capital. Interprete cada condición de optimalidad.

c) Defina equilibrio competitivo en esta economía.

d) Derive las expresiones que caracterizan el estado estacionario de stock de capital, la oferta de trabajo y el consumo.

e) Asuma que la función de producción es Cobb-Douglas $Y_t = K^\theta L^{1-\theta}$ y que la función de utilidad instantánea es $u(c, l) = \ln(c) + \gamma \ln(l)$. Encuentre la ecuación de la oferta de trabajo.

4. Considere el siguiente modelo neoclásico de crecimiento extendido para incluir impuestos y gasto del gobierno. La familia representativa (que consume y produce) elige la secuencia $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para resolver:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a:

$$c_t + k_{t+1} = (1 - \tau_t)f(k_t) + (1 - \delta)k_t$$

y k_0 dado. El capital se deprecia completamente en cada periodo. El gobierno financia sus gastos (exógenos) en cada periodo g_t aplicando un impuesto de tasa τ_t sobre la producción. El gasto de gobierno no afecta ni la utilidad privada ni las posibilidades de producción. La restricción presupuestaria del gobierno es:

$$\tau_t f(k_t) = g_t$$

Es conveniente definir el gasto de gobierno como proporción del producto como $s_t^g = g_t/f(k_t)$. Note que las dos restricciones presupuestarias implican que la restricción de recursos agregada sea:

$$c_t + g_t + k_{t+1} = f(k_t)$$

Finalmente, la familia representativa toma como dadas las trayectorias de las variables de política g_t y τ_t. Use las siguiente formas funciones: $u(c_t) = \ln c_t$ y $f(k_t) = k^\theta$ con $\theta \in (0,1)$.

a) Muestre que existe un máximo stock de capital alcanzable en esta economía (k_{max}).

b) Usando el principio de optimalidad escriba el problema optimización de la familia representativa en su forma recursiva y encuentre condiciones de primer orden. Interprete. ¿Cuál es el efecto del gasto del gobierno sobre las decisiones de las familias?

c) Suponiendo que $k_0 \in (0, k_{max})$ y que $\tau_t = \tau$ para todo t, encuentre el estado estacionario de esta economía.

d) Ahora suponga que el gobierno puede vender bonos que maduran un periodo para financiar potenciales déficits fiscales. Sea b_{t+1} los bonos vendidos en t, al precio q_t, que pagan una unidad de consumo en $t+1$. La familia representativa ahora elige $\{c_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de manera de maximizar su utilidad sujeto a:

$$c_t + k_{t+1} + q_t b_{t+1} = (1-\tau_t) f(k_t) + (1-\delta) + b_t$$

y k_0 dado. La restricción presupuestaria del gobierno es:

$$q_t b_{t+1} + \tau_t f(k_t) = g_t + b_t$$

con b_0 dado. Como antes, plantee el problema de optimización en su forma recursiva y obtenga las condiciones de primer orden. Adicionalmente, encuentre el estado estacionario del consumo, el stock de capital y el stock de deuda suponiendo que $s_t^g = s^g$ y $\tau_t = \tau$ (constantes).

Ejercicio Computacionales

1. *Para este ejercicio use exclusivamente el computador*. En este ejercicio aprenderemos a realizar contabilidad de crecimiento. Usando las series de datos en el archivo `DatosContabilidad.xlsx` realice el siguiente ejercicio de contabilidad del crecimiento para la economía Chilena, tomando en cuenta que la cantidad de trabajo puede no necesariamente coincidir con la población total.[1] Definimos la función de producción como:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Donde Y_t es el PIB real, A_t es la productividad total de factores, K_t es el stock de capital, y L_t es el trabajo (Definido como Empleo*Horas Trabajadas por Semana*52).

[1] Los datos fueron obtenidos del Banco Central (cuentas nacionales) y del INE (encuesta de empleo).

Definamos la población total disponible para trabajar N_t (medida como Población 15 años o más*100 horas* 52). Dividiendo la función de producción por N_t y tomando la definición del ratio capital-producto tenemos:

$$\frac{Y_t}{N_t} = A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{L_t}{N_t}$$

Aplicando logaritmos:

$$\log\left(\frac{Y_t}{N_t}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(A_t\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log\left(\frac{K_t}{Y_t}\right) + \log\left(\frac{L_t}{N_t}\right)$$

La idea es calcular cada uno de los componentes usando los datos y hallar A_t por diferencia. La única dificultad puede hallarse en la construcción del stock de capital. Usamos la ecuación de acumulación:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

donde I_t es la inversión real (la formación bruta de capital fijo). El stock de capital se puede construir recursivamente partiendo de un K_0 (que en los datos correspondería a K_{1960}). Una regla posible es el elegir K_{1960} tal que:

$$\frac{K_{1960}}{Y_{1960}} = \frac{1}{20}\sum_{t=1961}^{1980}\frac{K_t}{Y_t}$$

Va a necesitar `fsolve` en MATLAB o `NLsolve` en Julia para calcular K_{1960} que satisfaga la ecuación anterior [Ayuda: el función debería tener dos argumentos, K_{1960}, δ y la serie de Y_t, y calcular dentro la función K_{t+1} y el ratio K_t/Y_t para todo $t = 1960, ..., 1980$]. Los parámetros a usar son: $\alpha = 0{,}3$ y $\delta = 0{,}05$. Calcule los crecimientos año a año de los diferentes componentes y calcule el promedio de los crecimientos para distintos períodos. Esto es, llene la siguiente tabla:

Presidente	Período	$\frac{Y_t}{N_t}$ Producto	$A_t^{\frac{1}{1-\alpha}}$ PTF	$\left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ Capital	$\frac{L_t}{N_t}$ Trabajo
Aylwin	1990-1993				
Frei R-T.	1994-1999				
Lagos	2000-2005				
Bachelet	2006-2009				
Piñera	2010-2013				
Bachelet (II)	2014-2017				

¿Qué puede concluir respecto de los aportes de cada uno de los componentes al crecimiento total en los distintos períodos entre 1990 y 2016?

2. *Para este ejercicio use exclusivamente el computador*. Considere el modelo neoclásico de crecimiento analizado y resuelto en clase usando el método de perturbación. En

este ejercicio resolveremos el mismo modelo pero usando enteramente el computador. Suponga que el horizonte es infinito, que la población no crece (normalizada a 1) y que las preferencias están representadas por la siguiente función de utilidad instantánea:

$$u(c_t) = \ln c_t$$

La tecnología, por otro lado, está caracterizada por la siguiente función de producción neoclásica:

$$y_t = f(k_t) = Ak^\alpha$$

Los parámetros del modelo son: $\alpha = 0{,}36$, $A = 2{,}5$, $\beta = 0{,}987$, $\delta = 0{,}025$.

a) Escriba el problema que resolvería el Planificador central de esta economía y usando el método de Lagrange encuentre *todas* las condiciones de primer orden necesarias para resolver el problema. Interprete las condiciones.

b) Encuentre la asignación de estado estacionario (k^*, c^*, y^*, i^*) de esta economía. Para ello escriba una función de MATLAB/Julia con el sistema de ecuaciones que resuelve por el estado estacionario. Use `fsolve` en MATLAB o `NLsolve` en Julia para resolver tal sistema.

c) Usando un método de perturbación resuelva el modelo usando MATLAB/Julia. En particular, utilice el método basado en la aproximación de primer orden de las funciones de política.

d) Usando las funciones de política encontradas en (c) simule el comportamiento del capital, el consumo y el producto cuando el capital inicial se encuentra 60 % por debajo del capital de estado estacionario. Grafique dichas simulaciones. ¿La variables se mueven en la dirección que usted esperaba?

e) Escriba el modelo en su forma recursiva y defina cuales son las variables de estado y de control del problema. Encuentre a partir de la ecuación de Bellman *todas* las condiciones de primer orden necesarias para resolver el problema.

f) Usando el método de iteración de la función valor encuentre la solución del problema (la función valor y las funciones de política). La ello utilice un `loop` partiendo de una conjetura inicial $v(\cdot) = 0$.

g) Usando las funciones de política encontradas en (f) simule el comportamiento del capital, el consumo y el producto cuando el capital inicial se encuentra 60 % por debajo del capital de estado estacionario. Grafique dichas simulaciones. ¿Cómo se comparan sus resultados con los hallados en d?

h) En un mismo gráfico muestre las funciones de política halladas en c y f para el capital (y el consumo). ¿Cuál es la diferencia? Explique.